(#) Dokazati metodom potpune matematičke indukcije tvrdnju $\sum_{i=1}^{n-1} i!\, i = n! - 1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$.

Rj. $\sum_{k=1}^{n-1} k!\, k = n! - 1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$; $\sum_{k=1}^{n-1} k!\, k = 1!\cdot 1 + 2!\, 2 + 3!\cdot 3 + \dots$
$\dots + (n-1)!\cdot(n-1)$

BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za broj 2.

$$\sum_{k=1}^{1} k!\cdot k = 1!\cdot 1 = 1 = 1\cdot 2 - 1 = 2! - 1$$

Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za sve brojeve od 1 do n (uključujući i n tj. $\sum_{k=1}^{n-1} k!\, k = n! - 1$). Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je tvrdnja tačna za n+1.

$$\sum_{k=1}^{n} k!\, k = \underbrace{1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + 3!\cdot 3 + \dots + (n-1)!\cdot(n-1)}_{=\sum_{k=1}^{n-1} k!\cdot k} + n!\cdot n \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}$$

$$= n! - 1 + n!\cdot n = n!(1+n) - 1 = n!(n+1) - 1 = (n+1)! - 1$$

primjetimo se
$$n!\cdot(n+1) = \underbrace{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot n}_{=n!}\cdot(n+1) = (n+1)!$$

Tvrdnja je tačna za n+1.

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik $y = x^2(1+\ln x)$.

R.

1° DEFINICIONO PODRUČJE

$x > 0$

$\mathcal{D}: x \in \mathbb{R}^+$

$x \in (0, +\infty)$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

F-ja nije ni parna ni neparna. F-ja nije periodična.

Zato što defin. područje nije simetrično.

NULE, PRESJEK SA Y-OSOM, ZNAK

$y = 0$

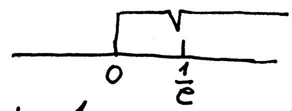
$x^2(1+\ln x) = 0$

$x^2 = 0$ ili $\ln x = -1$

$x = 0$ ili $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Kako za $x=0$ f-ja nije definisana bo je $(\frac{1}{e}; 0)$ nula f-je

F-ja ne siječe Y-osu



x	$(0, \frac{1}{e})$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
x^2	+	+
$1+\ln x$	−	+
y	−	+

$\frac{1}{e} \approx 0{,}36$

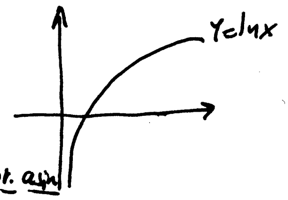
znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE F-JE

Ver. asim.

Za $x \le 0$ f-ja nije definisana.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2(1+\ln x) \left(= (0+)(1+(-\infty))\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{1+\ln x}{\frac{1}{x^2}} \left(= \frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{LoP}{=}$$



$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

Hor. asim.

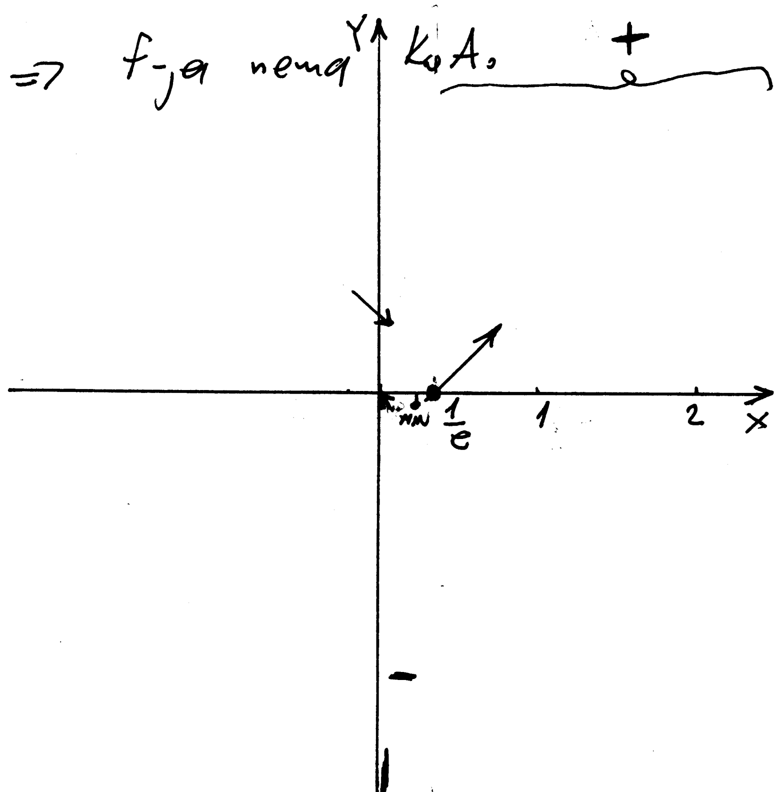
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2(1+\ln x) = \infty \cdot \infty = \infty \Rightarrow \text{f-ja nema HoA}$$

Kosa asimpt.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x(1+\ln x) = \infty\cdot\infty \Rightarrow \text{f-ja nema KoA}$$

Poslije ovog koraka počinjemo sa skiciranjem grafa f-je.

RAST I OPADANJE



$$y' = \left(x^2(1+\ln x)\right)' =$$

$$= 2x(1+\ln x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x(2 + 2\ln x + 1) = x(3 + 2\ln x)$$

$y' = 0$

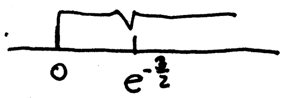
$x(3 + 2\ln x) = 0$

$x = 0$ ili $2\ln x = -3$

f-ja u ovoj tački nije definis.

$\ln x = -\frac{3}{2}$

$x = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}22$



prekidi f-je y + nule f-je y'

X	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$
y'	−	+
Y	↘	↗

MIN

tabela rasta i opadanja

$$f(e^{-\frac{3}{2}}) = (e^{-\frac{3}{2}})^2 (1 + \ln e^{-\frac{3}{2}}) = e^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-3} \approx -0{,}024$$

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja vidimo da f-ja ima ekstrem i to minimum u tački $(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}e^{-3})$.

PREVOJNE TAČKE, INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$y'' = (x(3 + 2\ln x))' = 3 + 2\ln x + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} = 5 + 2\ln x$$

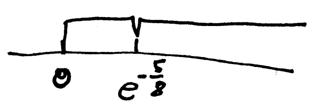
$y'' = 0$

$5 + 2\ln x = 0$

$2\ln x = -5$

$\ln x = -\frac{5}{2}$

$x = e^{-\frac{5}{2}} \approx 0{,}08$



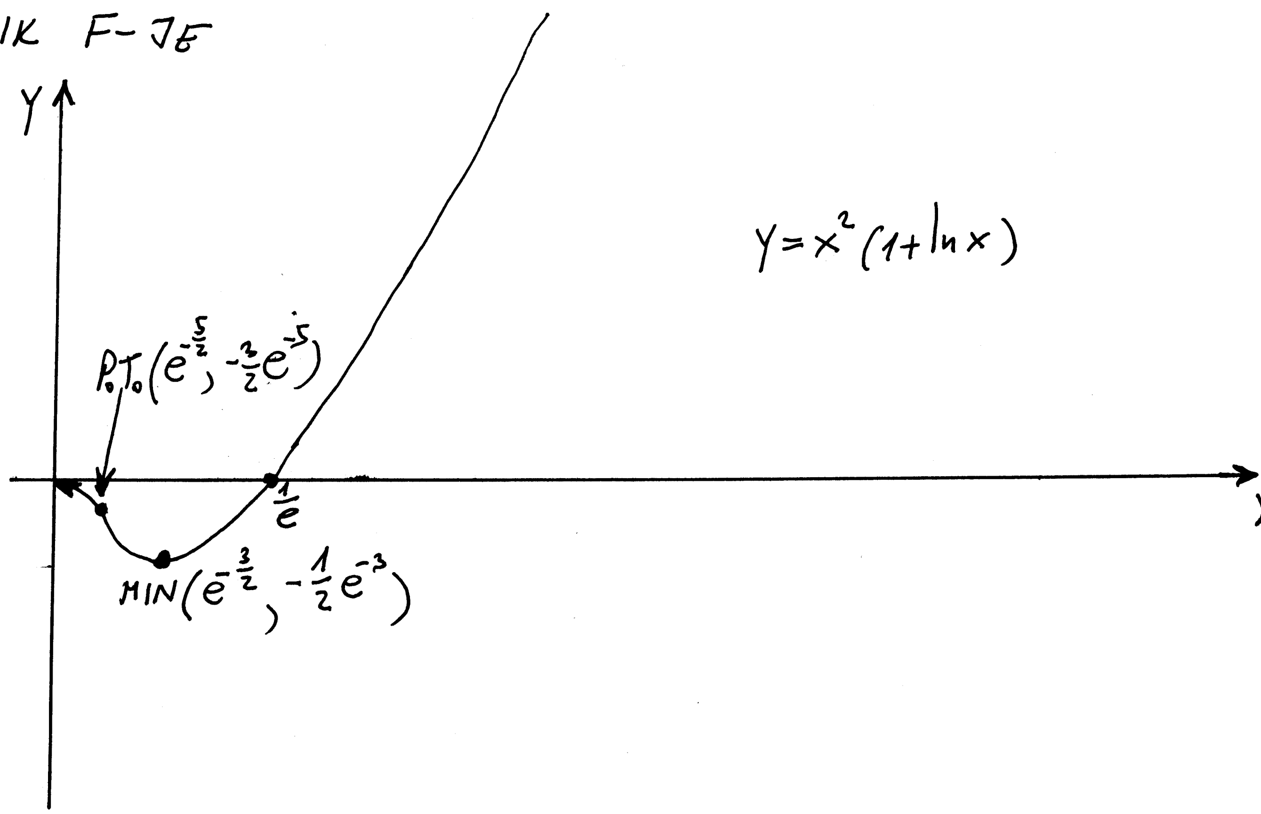
prekidi f-je y + nule f-je y'

X	$(0, e^{-\frac{5}{2}})$	$(e^{-\frac{5}{2}}, +\infty)$
y''	−	+
Y	∩	∪

P.T.

$$f(e^{-\frac{5}{2}}) = (e^{-\frac{5}{2}})^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}e^{-5} \approx -0{,}01$$

GRAFIK F-JE



Izračunati integral $\int x^8 e^{x^3} dx$.

Jedno od mogućih rješenja

Rj. $$\int x^8 e^{x^3} dx = \left| \begin{matrix} d(x^3) = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} \int x^6 e^{x^3} d(x^3) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^6 = (x^3)^2 & dv = e^{x^3} d(x^3) \\ du = 2x^3 d(x^3) & v = e^{x^3} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} x^6 e^{x^3} - \frac{2}{3} \int x^3 e^{x^3} d(x^3) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^3 & dv = e^{x^3} d(x^3) \\ du = d(x^3) & v = e^{x^3} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} x^6 e^{x^3} - \frac{2}{3} \left[x^3 e^{x^3} - \int e^{x^3} d(x^3) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(x^6 e^{x^3} - 2x^3 e^{x^3} + 2e^{x^3} \right) + C$$

traženo rješenje.

II način

Prije parcijalne integracije napraviti smjenu $x^3 = t$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 dx = dt \quad \Rightarrow \quad x^8 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} t^2 e^t dt$$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $(8y^2-12y+2)y' = x(y^3-2y^2+y)-2x$.

Rj. Prisjetimo se:

$y' = f(x)g(y)$ difer. jedn. sa razdvojenim promjenjivim

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ homog. dif. jedn.

$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ difer. jedn. koja se svodi na homog.

$y' + p(x)y = g(x)$ lin. dif. jedn.

$y' + p(x)y = g(x)y^n$, $n \in \mathbb{R}, n \neq 0, n \neq 1$ Bernulijeva dif. jedn.

$y = x f(y') + g(y')$ Lagranžova dif. jedn.

$y = xy' + f(y')$ Klerova diferenc. jedn.

$$(8y^2-12y+2)y' = x(y^3-2y^2+y)-2x$$

$$y' = x \cdot \frac{y^3-2y^2+y-2}{8y^2-12y+2}$$ ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{y^3-2y^2+y-2}{8y^2-12y+2}$$

$$\frac{8y^2-12y+2}{y^3-2y^2+y-2}\,dy = x\,dx \qquad \dots (1)$$

$(y^3-2y^2+y-2):(y-2) = y^2+1$
$-\ y^3-2y^2$
$= \ = \quad y-2$
$\quad y-2$
$\quad = \ =$

$h(y) = y^3-2y^2+y-2$
$h(0) = -2$
$h(1) = -1$
$h(2) = 8-8+2-2=0$

$$\frac{8y^2-12y+2}{y^3-2y^2+y-2} = \frac{A}{y-2} + \frac{By+C}{y^2+1} \qquad / \cdot (y-2)(y^2+1)$$

$$8y^2-12y+2 = A(y^2+1) + By(y-2) + C(y-2)$$

y^2: $A+B = 8$ (I)
y^1: $-2B+C = -12$ (II)
y^0: $A - 2C = 2$ (III)

(I)−(III): $B+2C = 6$ $/\cdot 2$
(II) $-2B+C = -12$ $+$

$5C = 0 \Rightarrow C = 0$

$C=0$
$-2B=-12$
$B=6$
$A+6=8$
$A=2$

(1) $\Rightarrow \left(\frac{2}{y-2} + \frac{6y}{y^2+1}\right) dy = x\,dx \quad / \int$

$$2\int \frac{dy}{y-2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1} = \int x\,dx$$

$$2 \ln|y-2| + 3 \ln|y^2+1| = x + c$$

$$\ln (y-2)^2 + \ln (y^2+1)^3 = x + c$$

$$\ln (y-2)^2 (y^2+1)^3 = x + c$$

$$(y-2)^2 (y^2+1)^3 = e^{x+c}$$

opšte rješenje diferencijalne jednačine